16.2. Односторонние пределы

В определении предела функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ считается, что x стремится к x_0 любым способом: оставаясь меньшим, чем x_0 (слева от x_0), большим, чем x_0 (справа от x_0), или колеблясь около точки x_0.

Бывают случаи, когда способ приближения аргумента x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов.

Число A_1 называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева*** в точке x_0, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле) (см. рис. 111).

Аналогично определяется *предел функции справа*, запишем его с помощью символов:

$$\Big(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon\Big) \iff$$
$$\iff \lim_{x\to x_0+0} f(x) = A_2.$$

Коротко предел справа обозначают $f(x_0 + 0) = A_2$.

Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.

Справедливо и обратное утверждение: если существуют оба предела $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ и они равны, то существует предел $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $A = f(x_0 - 0)$.

Если же $A_1 \neq A_2$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ не существует.

16.4. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется

неравенство $|f(x)| > M$. Записывают $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ или $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Коротко:

$$\boxed{\Big(\forall M > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x:\ |x - x_0| < \delta,\ x \neq x_0 \implies |f(x)| > M\Big) \iff \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.}$$

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

§ 17. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ (Б.М.Ф.)

17.1. Определения и основные теоремы

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.} \tag{17.1}$$

Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, β и т. д.

Примерами б.м.ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Другой пример: $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, — бесконечно малая последовательность.

Теорема 17.1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

Теорема 17.4. Если функция $\alpha(x)$ — бесконечно малая ($\alpha \neq 0$), то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция $f(x)$ — бесконечно большая, то $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая.

17.3. Основные теоремы о пределах

Рассмотрим теоремы, которые облегчают нахождение пределов функции. Формулировка и доказательство теорем для случаев, когда $x \to x_0$ и $x \to \infty$, аналогичны. В приводимых теоремах будем считать, что пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ существуют.

Теорема 17.7. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Теорема 17.8. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

Теорема 17.9. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} \quad \left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0\right).$$

Пример 17.3. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 7)$.

❍ Решение:

$$\lim_{x \to 1} (3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x \to 1} 3x^2 - \lim_{x \to 1} 2x + \lim_{x \to 1} 7 =$$
$$= 3\left(\lim_{x \to 1} x\right)^2 - 2 \lim_{x \to 1} x + 7 = 3 \cdot 1 - 2 + 7 = 8. \quad ●$$

2. Раскрытие неопределенностей. Как показывают решения задач, приведенных в п. 1, в простейших случаях нахождение предела сводится к подстановке в данное выражение предельного значения аргумента. Часто, однако, подстановка предельного значения аргумента приводит к неопределенным выражениям вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞. Нахождение предела функции в этих случаях называют раскрытием неопределенности. Для раскрытия неопределенности приходится, прежде чем перейти к пределу, проводить преобразования данного выражения.

Пример 17.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

❍ Решение: Здесь применить теорему о пределе дроби нельзя, т. к. предел знаменателя, при $x\to 2$, равен 0. Кроме того, предел числителя равен 0. В таких случаях говорят, что имеем *неопределенность вида* $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на $x-2\neq 0$ ($x\to 2$, но $x\neq 2$):

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)}=\frac{2+16}{2-4}=-9. \quad ●$$

Пример 17.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$.

❍ Решение: Здесь мы имеем дело с *неопределенностью вида* $\frac{\infty}{\infty}$. Для нахождения предела данной дроби разделим числитель и знаменатель

на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{1}{2}.$$

Функция $2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$ есть сумма числа 2 и б.м.ф., поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=2;\quad \lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=4. \quad ●$$

Теорема 17.10 (о пределе промежуточной функции). Если функция $f(x)$ заключена между двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$, стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A,\quad \lim_{x\to x_0}g(x)=A, \tag{17.6}$$
$$\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x), \tag{17.7}$$

то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

17.5. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,} \tag{17.11}$$

называемый ***первым замечательным пределом***. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. Докажем равенство (17.11).

❑ Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла MOB через x (см. рис. 113). Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунке $|AM| = \sin x$, дуга MB численно равна центральному углу x, $|BC| = \operatorname{tg} x$. Очевидно, имеем $S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектора } MOB} < S_{\triangle COB}$. На основании соответствующих формул геометрии получаем $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$. Разделим неравенства на $\frac{1}{2}\sin x > 0$, получим $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$.

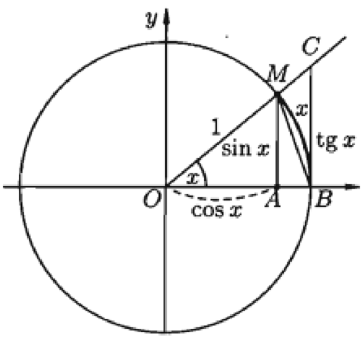

Рис. 113

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{17.12}$$

Пусть теперь $x < 0$. Имеем $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$, где $-x > 0$. Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{17.13}$$

Из равенств (17.12) и (17.13) вытекает равенство (17.11). ■

Пример 17.6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}$.

○ Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}}=\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}. \quad ●$$

Пример 17.7. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

○ Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1.$ ●

17.6. Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \qquad (17.15)$$

Если в равенстве (17.15) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ ($\alpha \to 0$ при $x \to \infty$), оно запишется в виде

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.} \qquad (17.18)$$

Равенства (17.15) и (17.18) называются ***вторым замечательным пределом***. Они широко используются при вычислении пределов. В приложениях анализа большую роль играет показательная функция с основанием e. Функция $y = e^x$ называется ***экспоненциальной***, употребляется также обозначение $e^x = \exp(x)$.

Пример 17.8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2.$$

§ 18. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

18.1. Сравнение бесконечно малых функций

Как известно, сумма, разность и произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая. Отношение же двух б.м.ф. может вести себя различным образом: быть конечным числом, быть бесконечно большой функцией, бесконечно малой или вообще не стремиться ни к какому пределу.

Две б.м.ф. сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ есть б.м.ф. при $x \to x_0$, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

1. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = A \neq 0$ $(A \in \mathbb{R})$, то α и β называются *бесконечно малыми одного порядка.*
2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, то α называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем β.
3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, то α называется *бесконечно малой более низкого порядка*, чем β.
4. Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta}$ не существует, то α и β называются *несравнимыми бесконечно малыми.*

Отметим, что таковы же правила сравнения б.м.ф. при $x \to \pm\infty$, $x \to x_0 \pm 0$.

Пример 18.1. Сравнить порядок функций $\alpha = 3x^2$ и $\beta = 14x^2$ при $x \to \infty$.

Решение: При $x \to 0$ это б.м.ф. одного порядка, так как

$$\lim_{x \to 0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{14x^2} = \frac{3}{14} \neq 0.$$

Говорят, что б.м.ф. α и β одного порядка стремятся к нулю с примерно одинаковой скоростью. ●

18.2. Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x \to x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Теорема 18.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой.

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;	6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;	8. $\ln(1+x) \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;	9. $\log_a(1+x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;	10. $(1+x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$; в частности, $\sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

Пример 18.9. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Решение: Так как $\operatorname{tg} 2x \sim 2x, \sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 18.10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$.

Решение: Обозначим $\frac{1}{x} = t$, из $x \to \infty$ следует $t \to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^t - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot t = \lim_{t\to 0} 1 = 1.$$

Пример 18.11. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4}$.

Решение: Так как $\arcsin(x-1) \sim (x-1)$ при $x \to 1$, то

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arcsin(x-1)}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}.$$